

## 光学設計ノート

光学設計ノート 7 (ver. 1.0)

### デジタル光学機器のサンプリング画像について

株式会社タイコ 牛山善太

#### 1. はじめに

今回からは、趣向を大きく変えて現在の光学機器を考える上で中心的な撮像システムと言ってよい、CCD, CMOS 等によるデジタル画像システムについて検討させていただく。こうした素子は、フィルムなどに比べ、より受光部の構造性が顕著であり、それが出力値に大きな影響をもたらす。

こうした受光デバイスとしての重要性が増している撮像素子により得られるサンプリング画像とレンズ等による古典的な光学系による結像との関係について主に検討する。

#### 2. サンプリング画像について

撮像素子によるサンプリング画像理論について整理させていただこう。最も簡単に考えると、CCD においては CCD 素子面全体に画素が規則的に配置されていて、それら画素の中央に光を直接受ける受光部フォト・ダイオードが存在している。そして、画素面積に対する受光部面積の割合を開口率と呼ぶ。もし、受光部(開口部)、画素がそれぞれ一辺の長さが  $w, P$  の正方形であるとすると、開口率は

$$w^2 / P^2$$

と表わせる。当然、 $P$  は画素の中心と中心の距離、受光部の並びのピッチでもある。

撮像素子上の、光学系による結像が1次元的な走査により電気信号に変換され、また画像に再構成されると考え、ここでは単純に1次元的に取り込まれる画像について考察しよう。図 1(a)にある様に光学系による結像の照度分布を  $g(x)$  とすると、CCD の巾  $w$  の有効受光部の並びを表わす関数  $d(x)$  (図 1(b)) により、この  $g(x)$  が切り取られる。この様子が図 1(c)である。ところが、実際には受光部内においては結像の細部の情報は存在せず、受光量の平均値がこの受光部の出力する情報となり、図 1(e)における  $f(x)$  が適当な CCD からの出力信号を表わす。

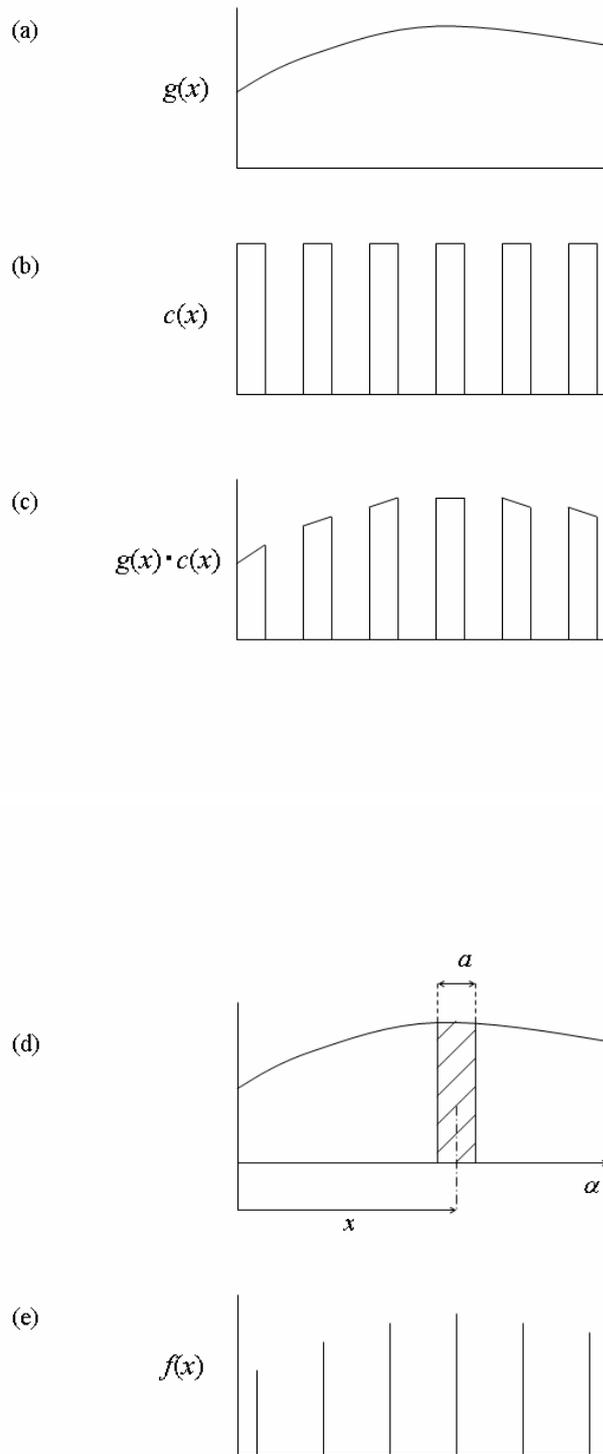


図-1(a)(b)(c)(d)(e) 撮像素子開口によるサンプリング

ここで、以下に述べる考え方に沿って  $f(x)$  を導こう。多数の受光部におけるそれぞれの受光量は、開口そのものを表わす(感度分布)関数  $a(x)$  と、 $g(x)$  の積の関数の積分で表わすことが出来る(図 1(d))。最終的には、最大値を1と正規化したスペクトル分布を導きたいので、その場合に比例定数は省略でき、ここでの積分値は、サンプリング範囲における照度の平均値を表わすと考えることも可能である。積分変数を  $\alpha$  とおけば、中心が  $x$  の位置に存在する開口の受光量を表わす関数  $d(x)$  は、

$$d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) a(\alpha - x) d\alpha$$

とすることが出来る。この  $d(x)$  は、2つの実関数、 $g(x)$  と  $a(x)$  の相関関数そのものであって、2実関数の相互相関関数を以下の様に表す。

$$d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) a(\alpha - x) d\alpha = g(x) \cdot a(x)$$

よって、CCD によりサンプリングされた画像を表わす  $f(x)$  は、開口部中心が存在する位置に、間隔  $P$  でそれぞれ位置するデルタ関数の並びの関数  $b(x)$  と、上記  $d(x)$  の積により以下の様に表現できる。すなわち後述(5式)の comb(櫛)関数  $b(x)$  を用いて、

$$f(x) = \{g(x) \cdot a(x)\} \cdot b(x) \quad (1)$$

となる。

ところで上記、相関関数に似たものに畳み込み積分(convolution)がある。

$$d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) a(x - \alpha) d\alpha = g(x) * a(x)$$

上記の様な連続画像 data の切り出に用いるには(或いは分布の類似性を調べるのには)、切り出す受光素子  $a(x)$  の感度分布が相関の場合とは  $x$  方向で逆になり不適切である。

しかし例えば、忠実な再現像  $g(x)$  の、結像光学系の収差、回折等の影響により劣化した像  $d(x)$  を得る様な場合に、 $g(x)$  と、結像系による点光源像のボケ関数(PSF)  $a(x)$  (画面上では殆ど  $a(x)$  の分布が変化しないと仮定した場合)の間で畳み込み積分は頻繁に利用される(図 2)。

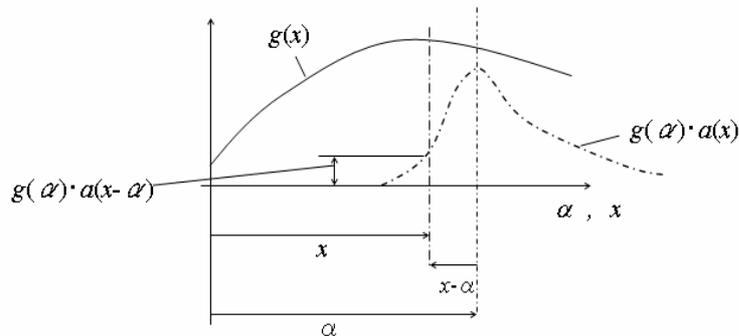


図-2 コンボリューション

### 3. サンプリング画像と OTF 参考文献 1)、2)

ここで、 $g(x)$ を点光源に対応する点像強度分布と考え、さらに(1)式のフーリエ変換を行い、CCD の影響を含んだ画像の OTF、 $F(\nu)$ を導こう。例えば、 $g(x)$ ,  $b(x)$ のフーリエ変換をそれぞれ、 $G(\nu)$ 、 $B(\nu)$ として表わせば、フーリエ変換により、コンボリューション定理を用いて

$$g(x) \cdot b(x) \Leftrightarrow G(\nu) * B(\nu)$$

或いは、今回の場合には、関数右肩の \* は複素共役を表すとして

$$\mathcal{F} [g(x) \cdot a(x)] = G(\nu) \cdot A^*(\nu)$$

となり(相関定理)、(1)式より

$$F(\nu) = \{G(\nu) \cdot A^*(\nu)\} * B(\nu) \quad (2)$$

$A(\nu)$ は開口部を表わす関数  $a(x)$ のフーリエ変換であり、この場合は、単純に巾  $w$  の矩形関数(遇関数)を想定しよう。図3における様な矩形関数は

$$a(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{w}\right) = 1 \quad , \quad \left|\frac{x}{w}\right| \leq 0.5 \quad \text{の時}$$

$$= 0 \quad , \quad \text{それ以外の場合}$$

と表現することが出来、また、そのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\left[\text{rect}\left(\frac{x}{w}\right)\right] = A(\nu) = |w|\text{sinc}(w\nu) \quad (3)$$

となる。ここで

$$\text{sinc}(w\nu) = \frac{\sin(\pi w\nu)}{\pi w\nu} \quad (4)$$

と sinc 関数は定義される。さらに、(1)式における関数  $b(x)$  は comb(櫛)関数として知られ

$$b(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nP) = \frac{1}{|P|} \text{comb}\left(\frac{x}{P}\right) \quad (5)$$

と表わされる。そしてこの関数のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[b(x)] = B(\nu) = \text{comb}(P\nu) \quad (6)$$

よって、(3)、(6)式より、上記(2)式は以下の様に表わすことが出来る。

$$F(\nu) = |w|\{G(\nu) \cdot \text{sinc}(w\nu)\} * \text{comb}(P\nu) \quad (7)$$

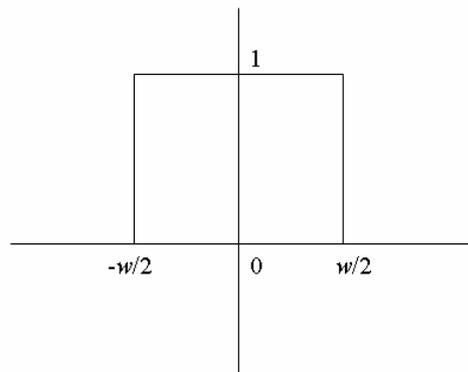


図-3 矩形関数  $a(x)$

sinc 関数は図 4 において表わされ、(7) 式中括弧内の関数を  $D(\ )$  と置けば、この関数は図 5(a) の様になる。また、OTF の定義に従い  $f(x)$  に含まれる全光量を 1 に正規化して新たに  $F_N(\ )$  を考えれば、やはり正規化した  $G_M(\ )$  を用いて(7)式から

$$\begin{aligned} OTF(\nu) = F_N(\nu) &= \frac{F(\nu)}{F(0)} = \frac{F(\nu)}{|w| \cdot G(0)} \\ &= \{G_N(\nu) \cdot \text{sinc}(w\nu)\} * \text{comb}(P\nu) \end{aligned} \quad (8)$$

$F_M(\ )$  は(8) 式の通り、 $D_M(\ )$  と  $B(\ )$  がコンボリュートされることにより図 5(b) にあるように表現される。

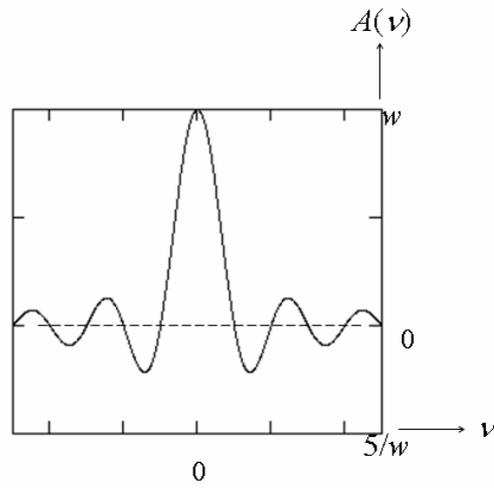


図-4 sinc関数  $A(v)$

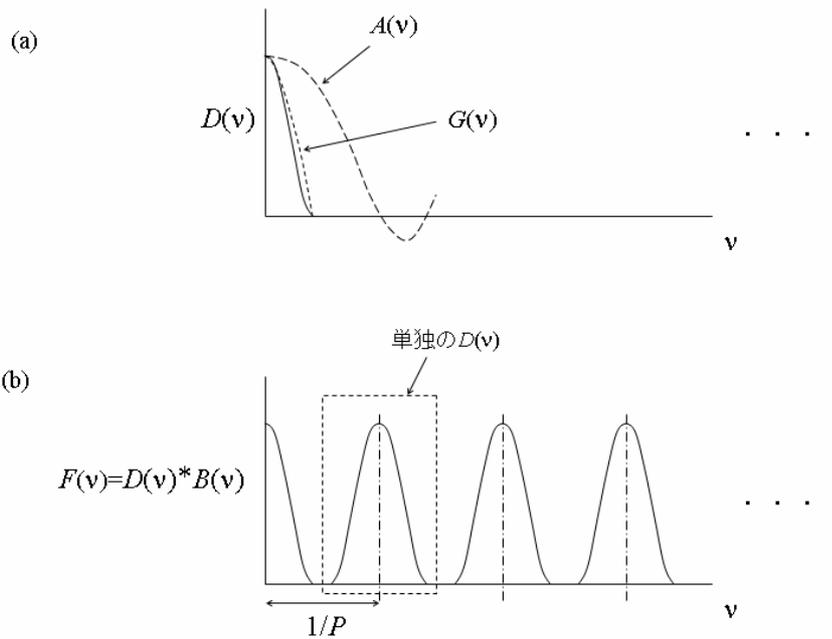


図-5(a)(b) 撮像素子によるOTF

Comb 関数に畳み込まれて並ぶ(8)式右辺中カッコ内の  $D_M(\ )$  がお互いに隣りの  $D_M(\ )$  と重なり合っていない場合には(照度分布の最大空間周波数幅  $2B$  の場合、ナイキスト周波数  $B$  は、式  $B=1/2P$  によりサンプリング間隔  $P$  との関係が決める<sup>1),2)</sup>、適当な矩形関数などで単独の  $D_M(\ )$  を切り取り、逆フーリエ変換することにより  $g(x)$  が再現できる。ただしこの時、画素開口の影響により sinc 関数が乗ぜられた分だけ、低い OTF を持つ照度分布を再現する事になる(図 6)。さらに、サンプリング間隔が定まっている場合には、ナイキスト周波数が決まるので、この仕様に収まるように画像の周波数帯域制限をローパス・フィルター等で行なわなければならない、帯域制限の関数が  $D_M(\ )$  に乗ざれることとなり、この関数の形如何によって OTF はさらに下降することになる。

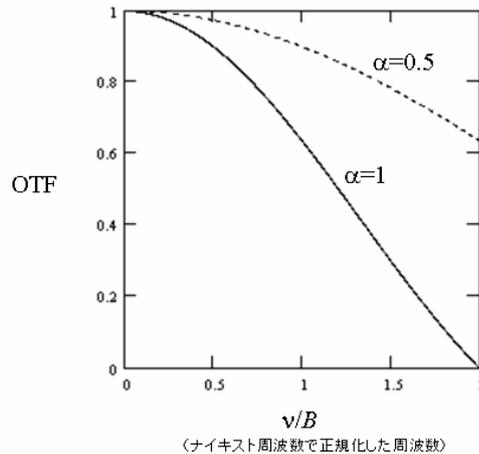


図-6 撮像素子開口によるOTFの劣化  
サンプリング間隔を $P$ 、受光部の開口幅を $\nu$ として $\alpha=\nu/P$

#### 4. 参考文献

- 1) 谷田貝豊彦:光とフーリエ変換(朝倉書店,東京,1992)
- 2) 牛山善太、草川徹:シミュレーション光学(東海大学出版会、東京、2003)