提供：
Optical Solutions
株式会社オプティカルソリューションズ
〒101-0032
東京都千代田区岩本町 2-15-8（MAS 三田ビル 3 階）
TEL：03-5833-1332　FAX：03-3865-3318
http://www.osc-japan.com/

光学設計ノーツ　５８（ver.1.0）

キルヒホッフの回折積分式　1

株式会社タイコ
牛山善太

今回からは実用的な回折振幅・強度計算の基礎となる、キルヒホッフ(kirchhoff)の回折積分式について、ヘルムホルツ（Helmholtz）方程式から出発して述べさせて戴きたい。特に今回はそのまた基本となるキルヒホッフノ積分定理について解説させて戴く。

１．　キルヒホッフの積分定理　①

スカラー波動方程式、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad \text{(A)}$$

において厳密な単色波を考慮し

$$U=u(r)\exp(-i\omega t) \qquad \text{(B)}$$

として、時間項を分離した形を考えると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0 \qquad (1)$$

ただし、　$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

なる、時間に依存しない、波動の空間的な状態を表すヘルムホルツ方程式が導かれる。ここから、実用的な回折強度計算式としての解を導こう。

図 1 にあるような空間内の閉曲面を考える。

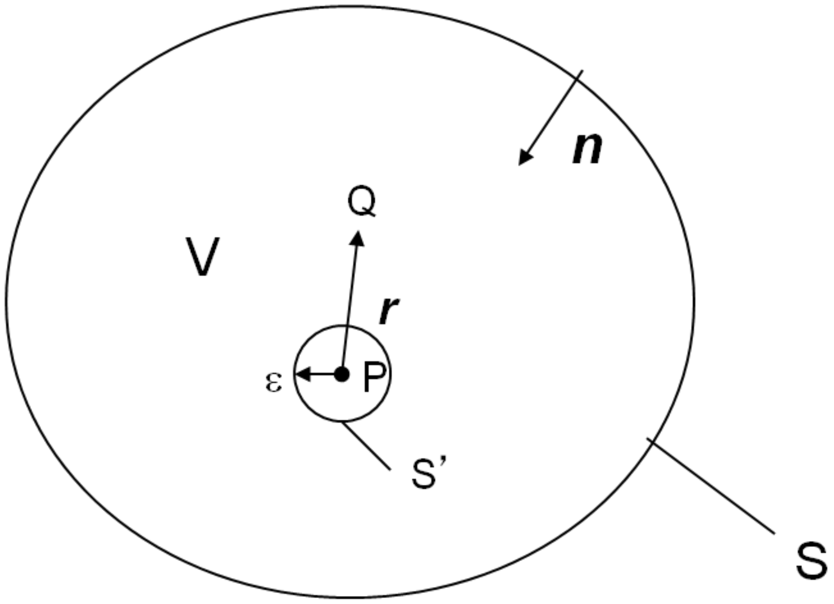

図 1　　　波動空間における Green の定理の適用

その内向き法線を $\boldsymbol{n}$ として、それぞれ、滑らかな閉曲面 S で囲まれた内部空間を V とし、V 内および曲面 S 上で、関数 U,G がそれぞれ、それ自身と、その 1 次および 2 次導関数が連続である時、以下の関係、グリーン（Green）の定理[3),4),8)]が成立する（第 2 公式)。

$$\iiint_V \left(U\nabla^2 G - G\nabla^2 U\right)dv = -\iint_S \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma \qquad -\ (2)$$

$\partial U/\partial n$、$\partial G/\partial n$ は閉曲面 S 上の点における内向き法線方向に沿った関数 U,G の微分係数を表している。上記(1)式は

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

とも表せ、ここで関数 U,G が（1）式、ヘルムホルツ方程式を満たしていれば（2）式左辺の被積分関数は常に、

$$-Uk^2G + Gk^2U = 0$$

となり、(2)式は

$$\iint_S \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0 \qquad -（3）$$

と出来る。ここでこの様な条件を満たす関数の一つを Green 関数として以下のように決める。

$$G(Q) = \exp(iks)\Big/ s \qquad -（4）$$

ここで、この閉曲面領域内の任意の観測点を P とするとき、この点 P から、やはりこの領域内、曲面上のある点 Q に達するベクトル $\boldsymbol{s}$ の大きさを s と表している。従って（B）式での時間項の指数の符号に注意すれば、（4）式は明らかに原点 P を中心として広がって行く球面波を表していることが理解できる。

ところが（3）式の面積積分を考える際に、s＝0 となる P 点はこの関数が不連続であって特異点となるのでこの点を取り除いて空間を考えなくてはならない。そこで点 P を中心とする微小半径 ε、表面積 S' の球をこの空間から切り取る。すると（3）式における積分面積は $S+S'$ となり、（4）式も考慮すると、

$$\iint_S \left(U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma + \iint_{S'} \left[U\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial U}{\partial n} \right] d\sigma = 0 \qquad (5)$$

となる。

ここで、(4) 式の関数を用いて小球についての面積分を考えよう。ところで、$\partial s/\partial n$ は $\vec{n}$ 方向へ Q が微小量△n 移動して Q'となった場合の s の変化の割合を表している(図 2)。

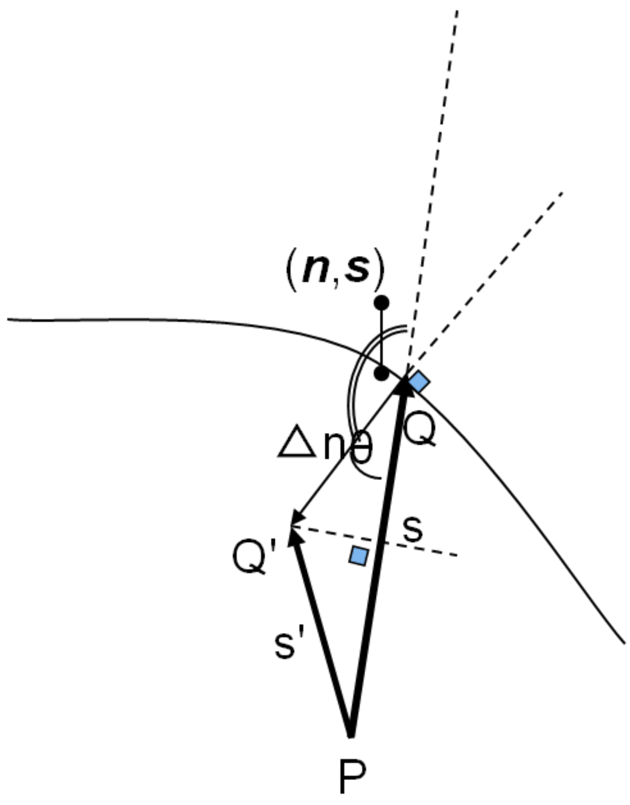

図 2　$\boldsymbol{S}$ の変化

従って、

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta n}$$

$$= \lim_{\Delta n \to 0} \frac{\sqrt{\{s - \Delta n \cos\theta\}^2 + \Delta n \sin\theta^2} - s}{\Delta n}$$

$$= \lim_{\Delta n \to 0} \frac{s\sqrt{1 - \frac{\Delta n}{s^2}\{2s\cos\theta - \Delta n\}} - s}{\Delta n}$$

微小量△n に比べ s は非常に大きな量と考えれば、上式根号内のそれらの２次の項は消えて、さらに根号内の第２項<<１として、根号に１次近似を行い計算していくと

$$\approx \lim_{\Delta n \to 0} \frac{s\left(1 - \dfrac{\Delta n}{s}\cos\theta\right) - s}{\Delta n}$$

$$= -\cos\theta$$

図２から分かるように、下記の cos の位相は、ここでの二つのベクトルの為す角度を表すとして、$\vec{n}, \vec{s}$ の方向による cos の符号に注意して、

$$= \cos(\vec{n}, \vec{s})$$

となる。

2. 参考文献

１） 飯塚啓吾：光工学（共立出版、東京、１９８３）P27
２） 石黒浩三：光学（共立出版、東京、１９５３）P46
3） 大頭仁、高木康博:基礎光学(コロナ社、東京、2000)P113
4） 高木貞治:解析概論、第3版(岩波書店, 東京, 1997)P380
５） 辻内順平：光学概論Ⅱ（朝倉書店、東京、1979）P60
6） 鶴田匡夫:応用光学Ⅰ(培風館、東京、1990)
７） J.W.Goodman:Introduction to Fourier Optics 2nd.edi. (McGraw-Hill,NewYork,1996)P38
８） R.Guenther：OPTICS（John Wiley & Sons,New York,1990）
９） M.Born & E.Wolf :Principles of Optics,7th edition(Pergamon Press, Oxford,1993)／草川徹訳：光学の原理（東海大学出版会,2005)P575
１０）牛山善太：波動光学エンジニアリングの基礎（オプトロニクス社、東京、2005）P111